

# Vorlesung 6b

## Die Normalverteilung

### Teil 2:

Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}$   
und ihre Schwestern  $N(\mu, \sigma^2)$

Wir hatten in V5a4 definiert:

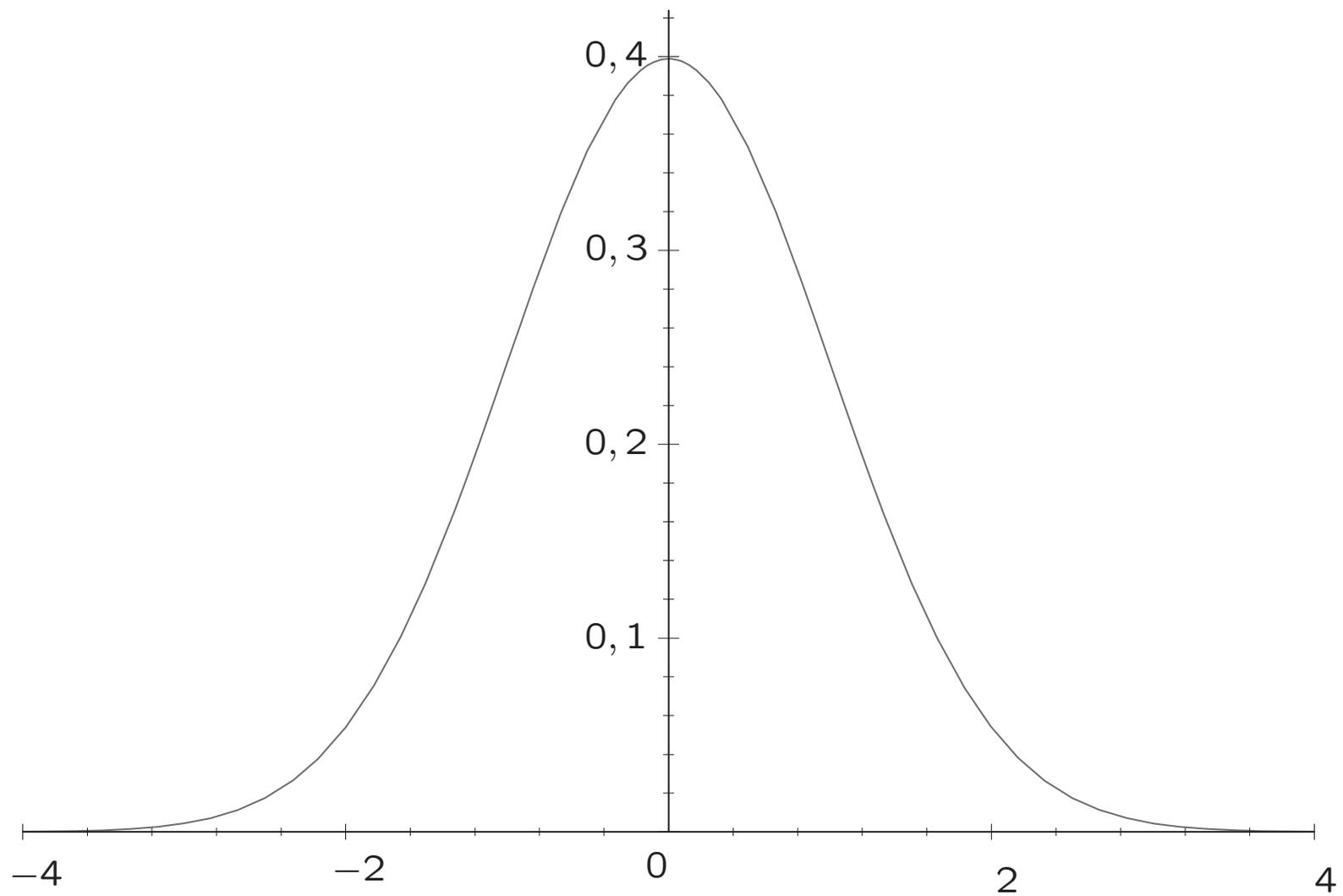
Eine  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable  $Z$  mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.

Es gilt (vgl. Teil 4 der heutigen VL):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a) da = 1.$$



Für ein standard-normalverteiltes  $Z$   
hatten wir in V5a4 festgestellt:

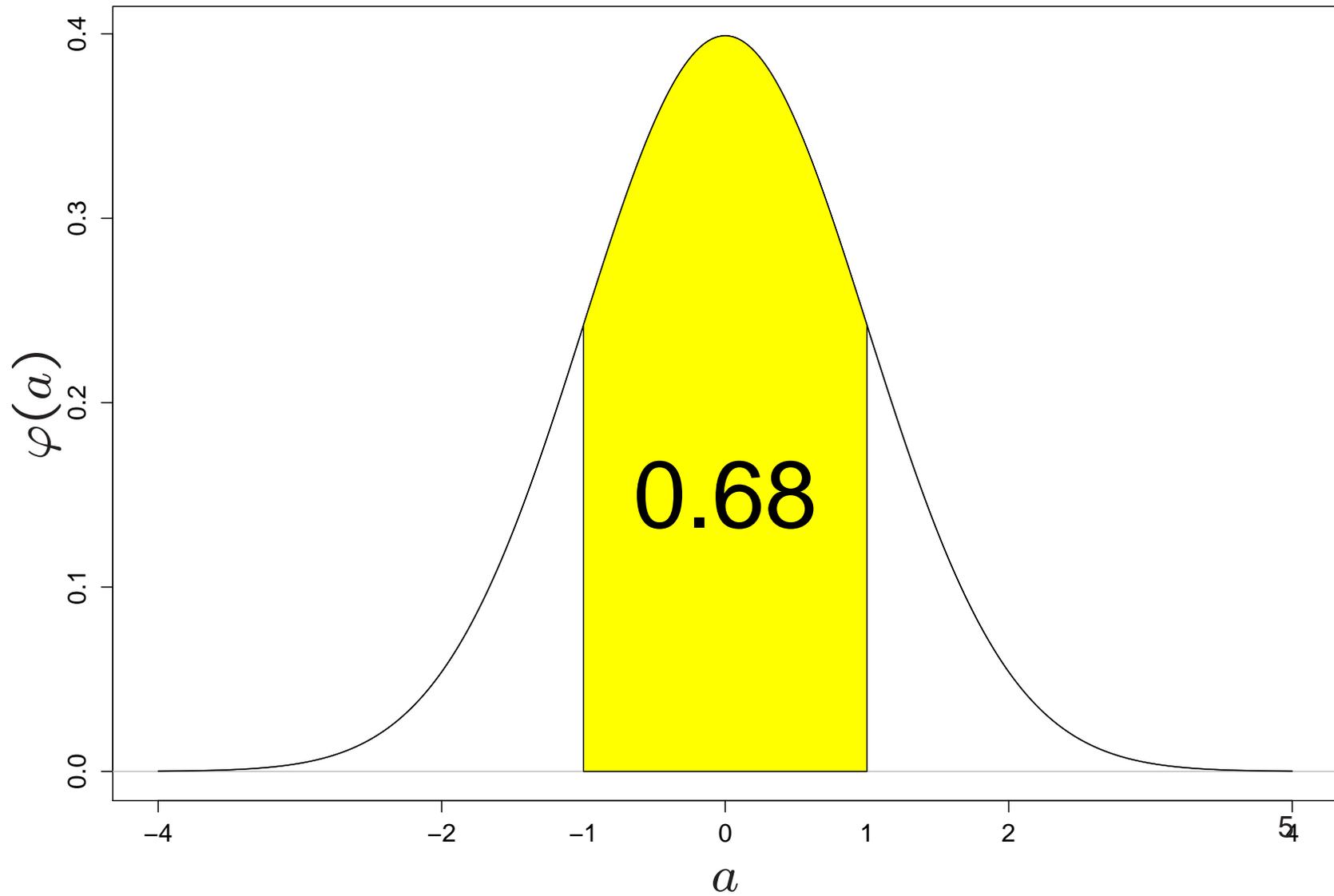
$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

Also:

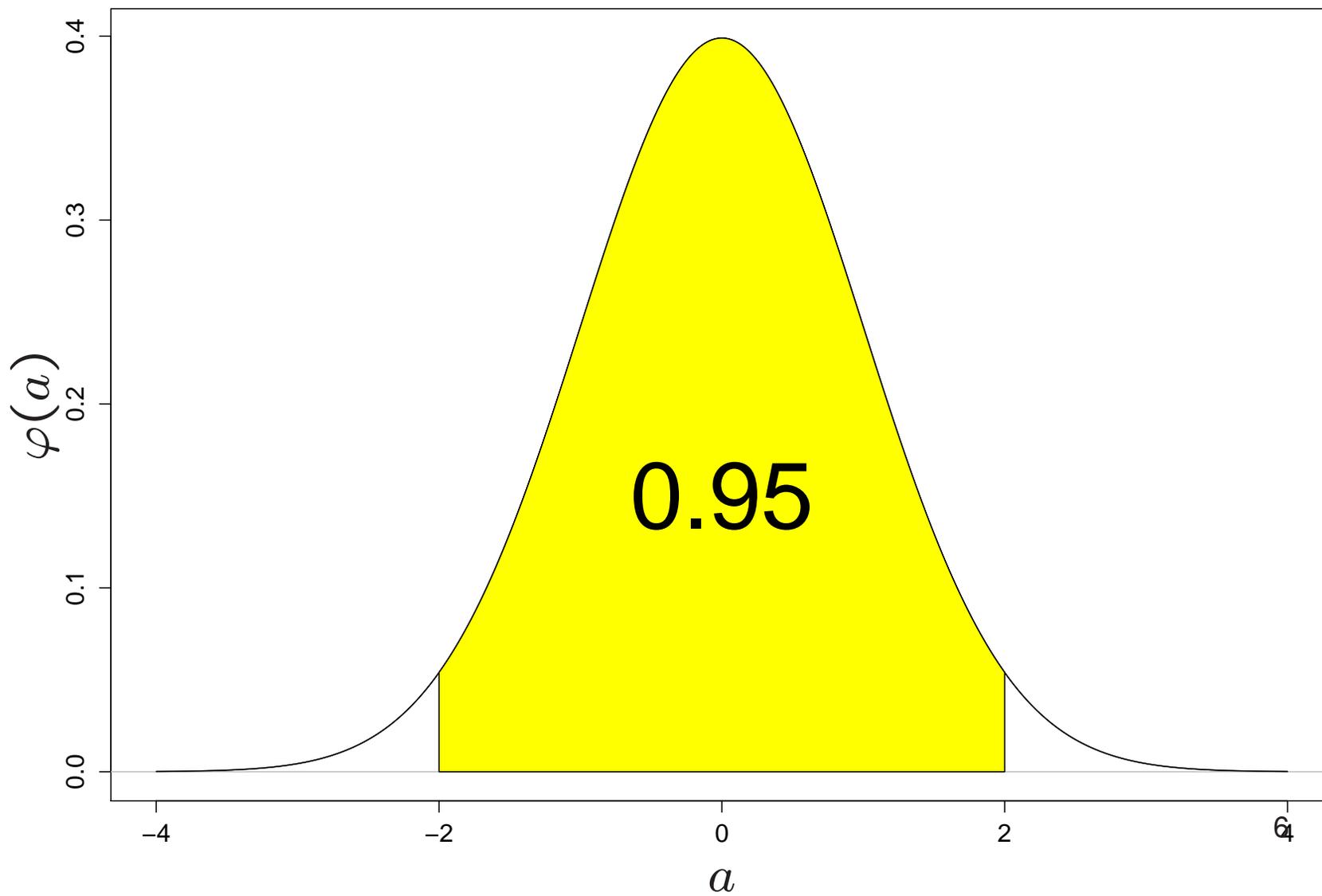
$$\mathbf{Var} [Z] = 1.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:

$$\mathbf{P}(|Z| < 1) \approx 0.68$$



$$P(|Z| < 2) \approx 0.95$$



Sei  $Z$  standard-normalverteilt,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ . Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von  $X$  ist  $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$  mit

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte  $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$   
heißt **normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$** ,

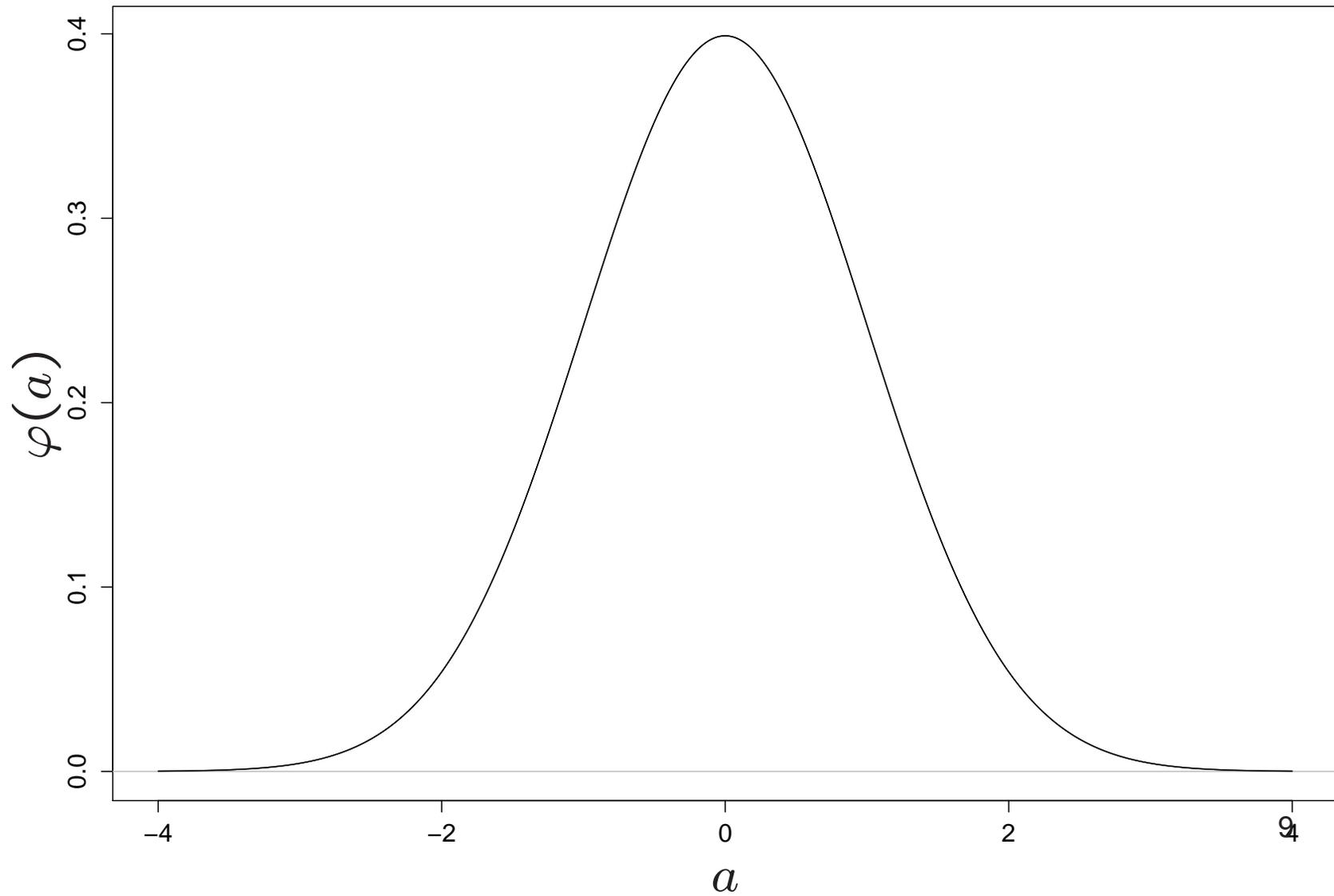
kurz

**$N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.**

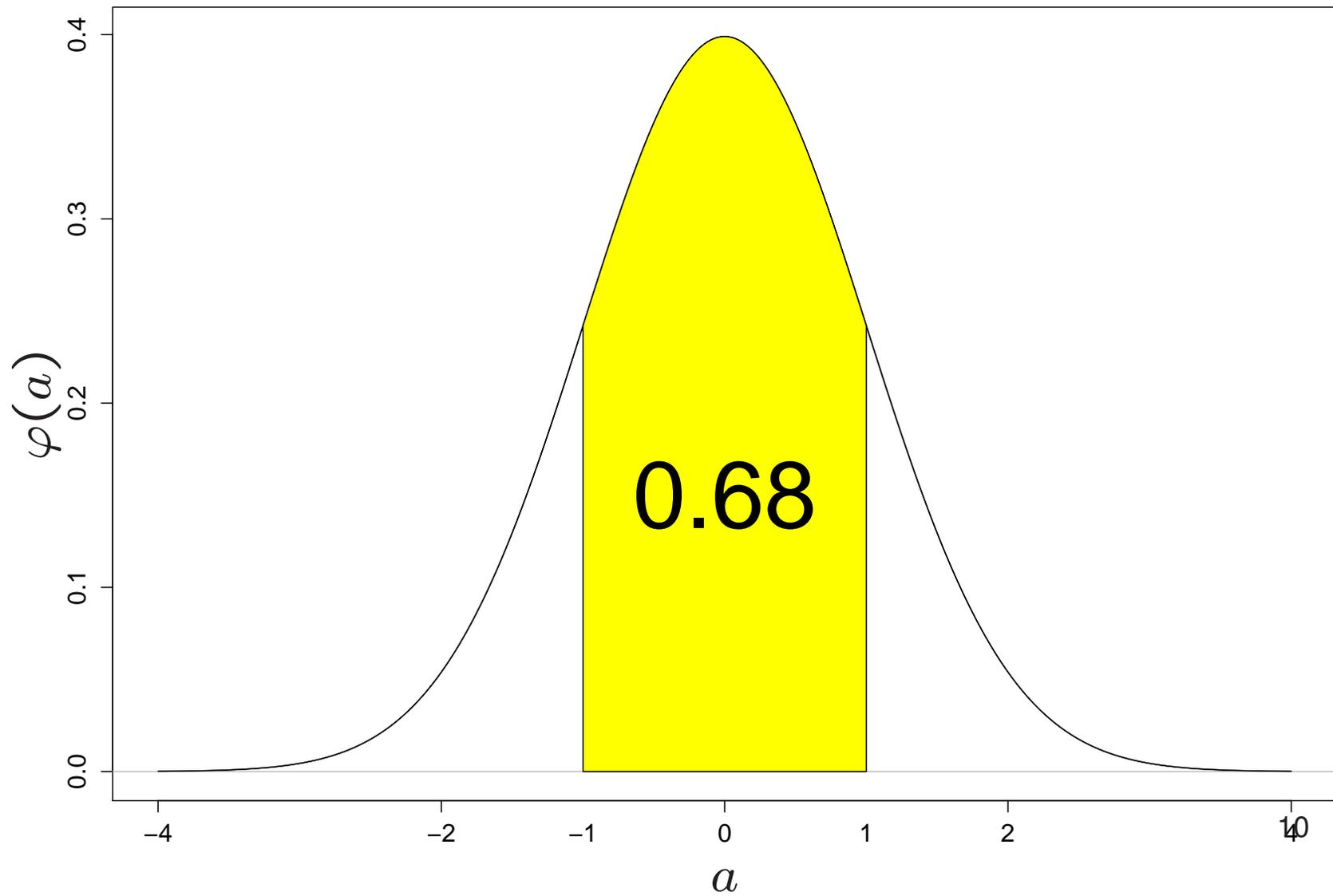
Ist  $Y$   $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt,

dann ist  $\frac{Y - \mu}{\sigma}$  standard-normalverteilt.

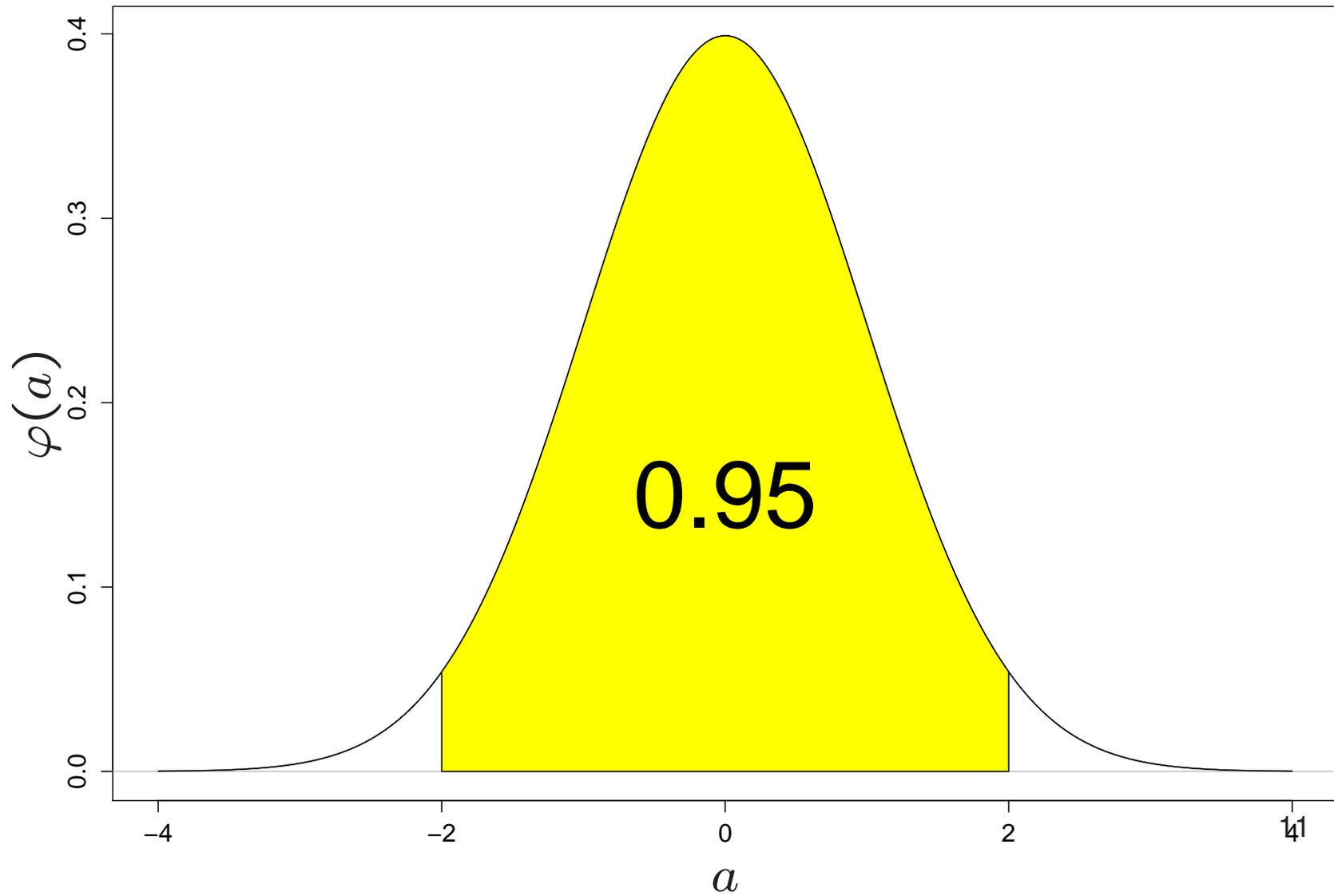
# Dichtefunktion $\varphi$ der Standard-Normalverteilung



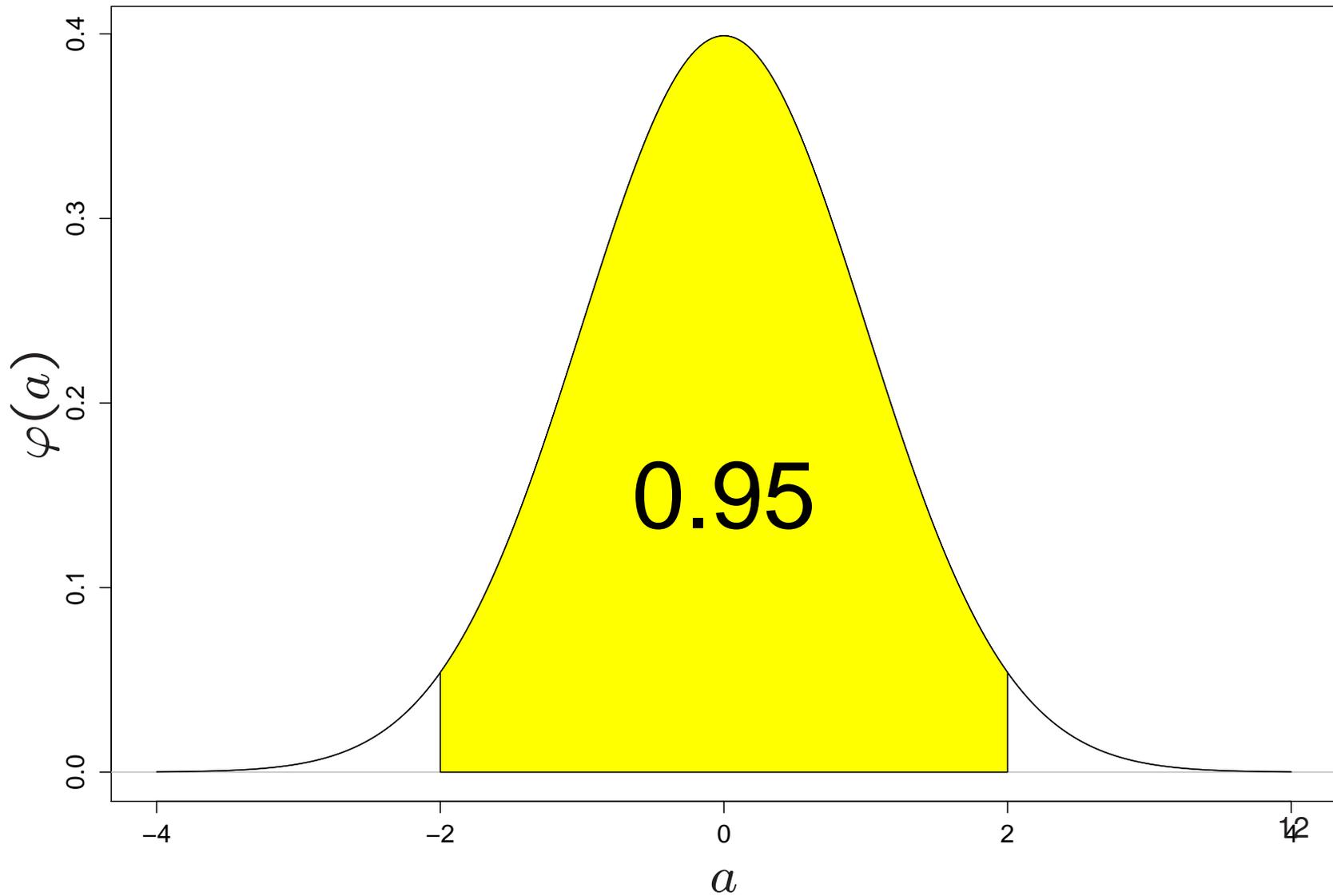
$$\mathbf{P}(|Z| < 1) \approx 0.68$$



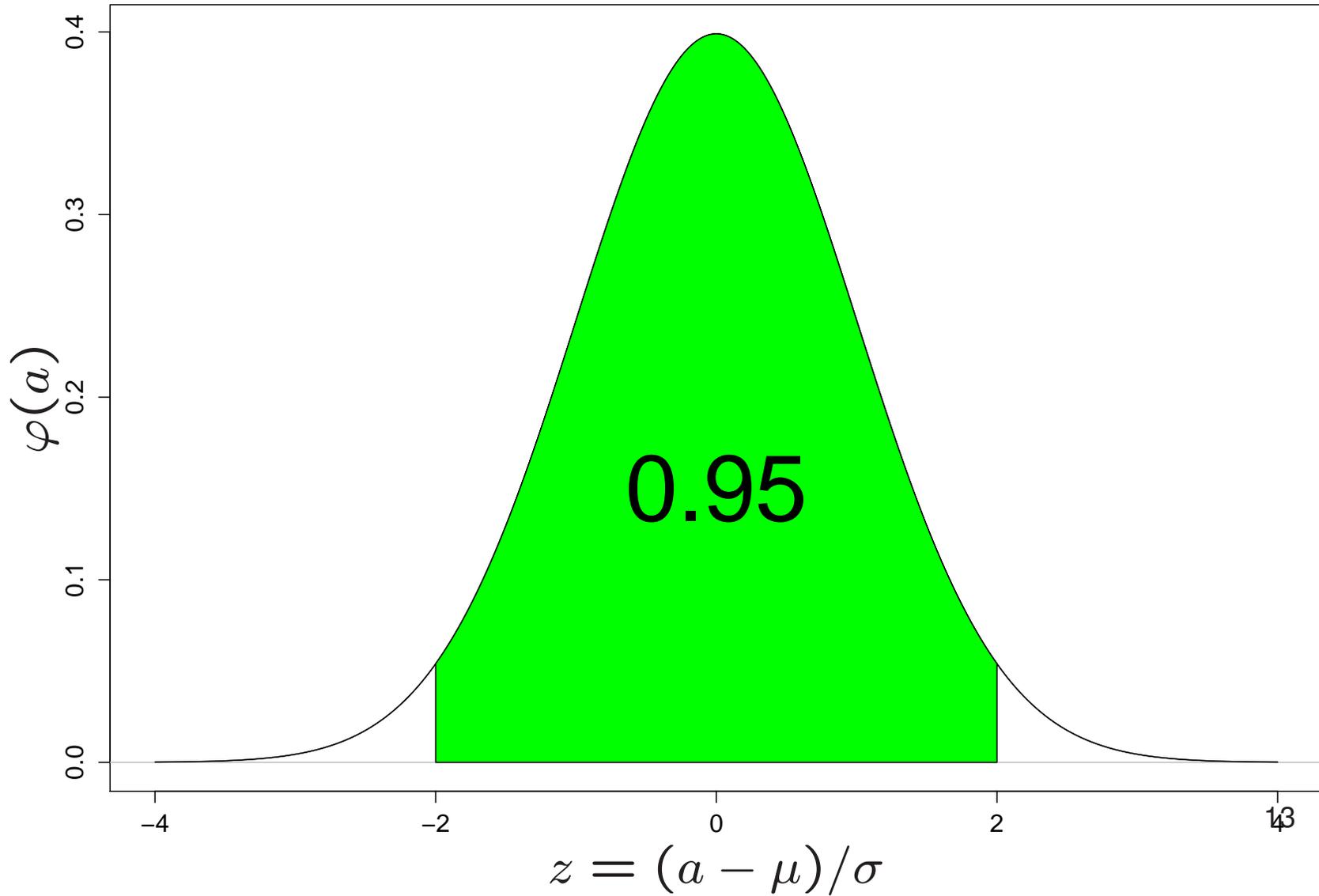
$$P(|Z| < 2) \approx 0.95$$



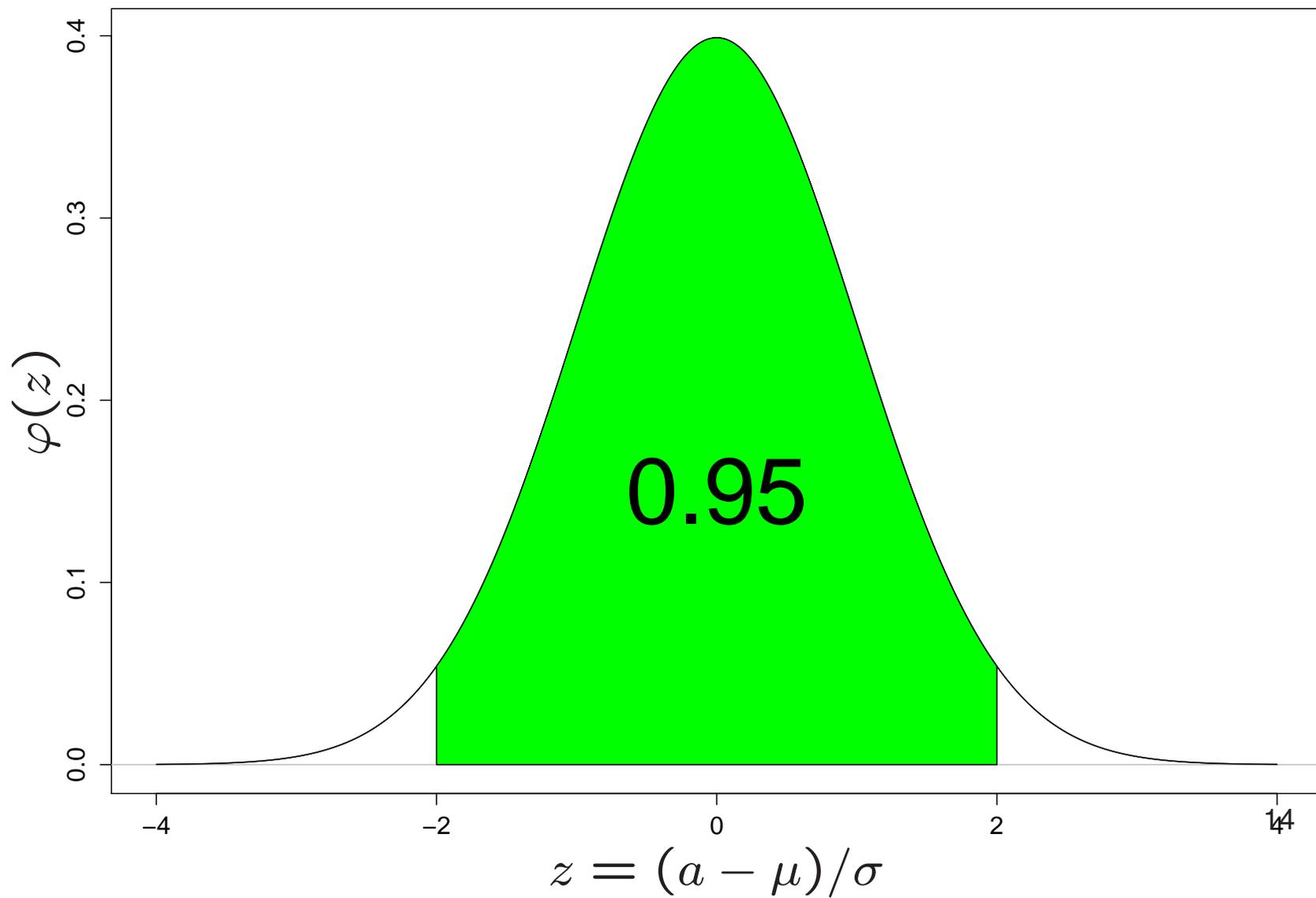
Und für  $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsgrößen  $X$ ?

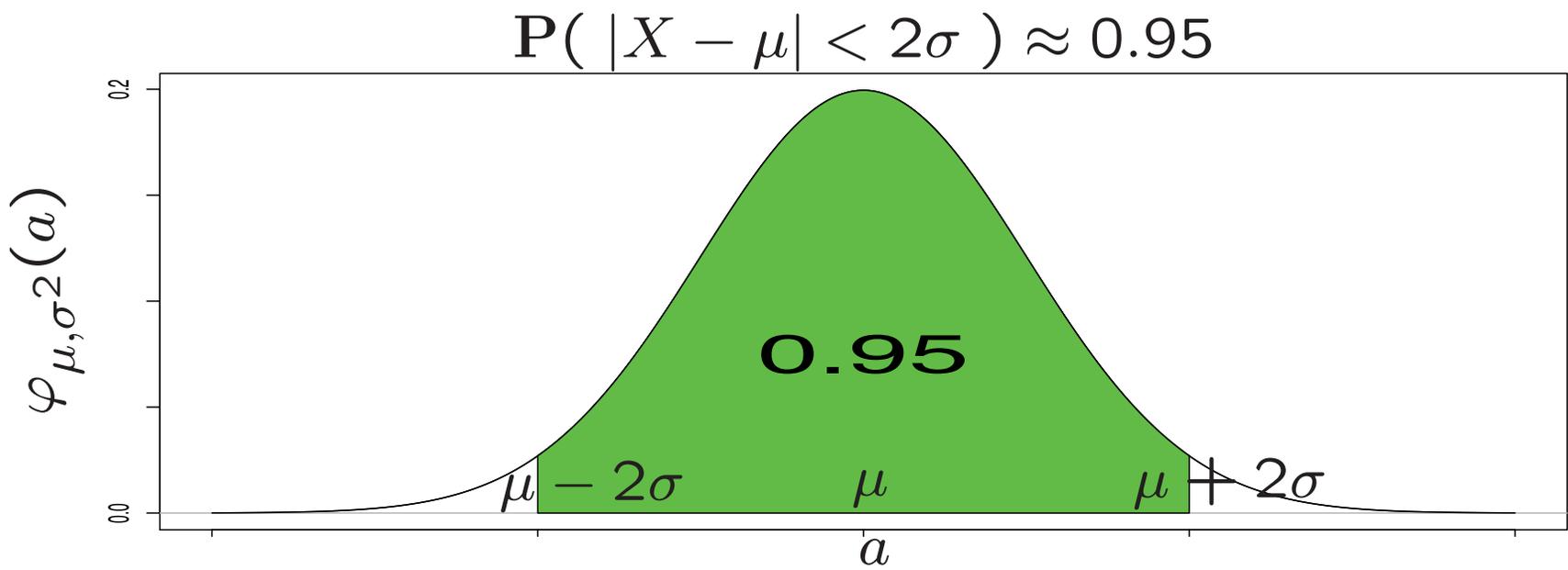


Dasselbe in grün.

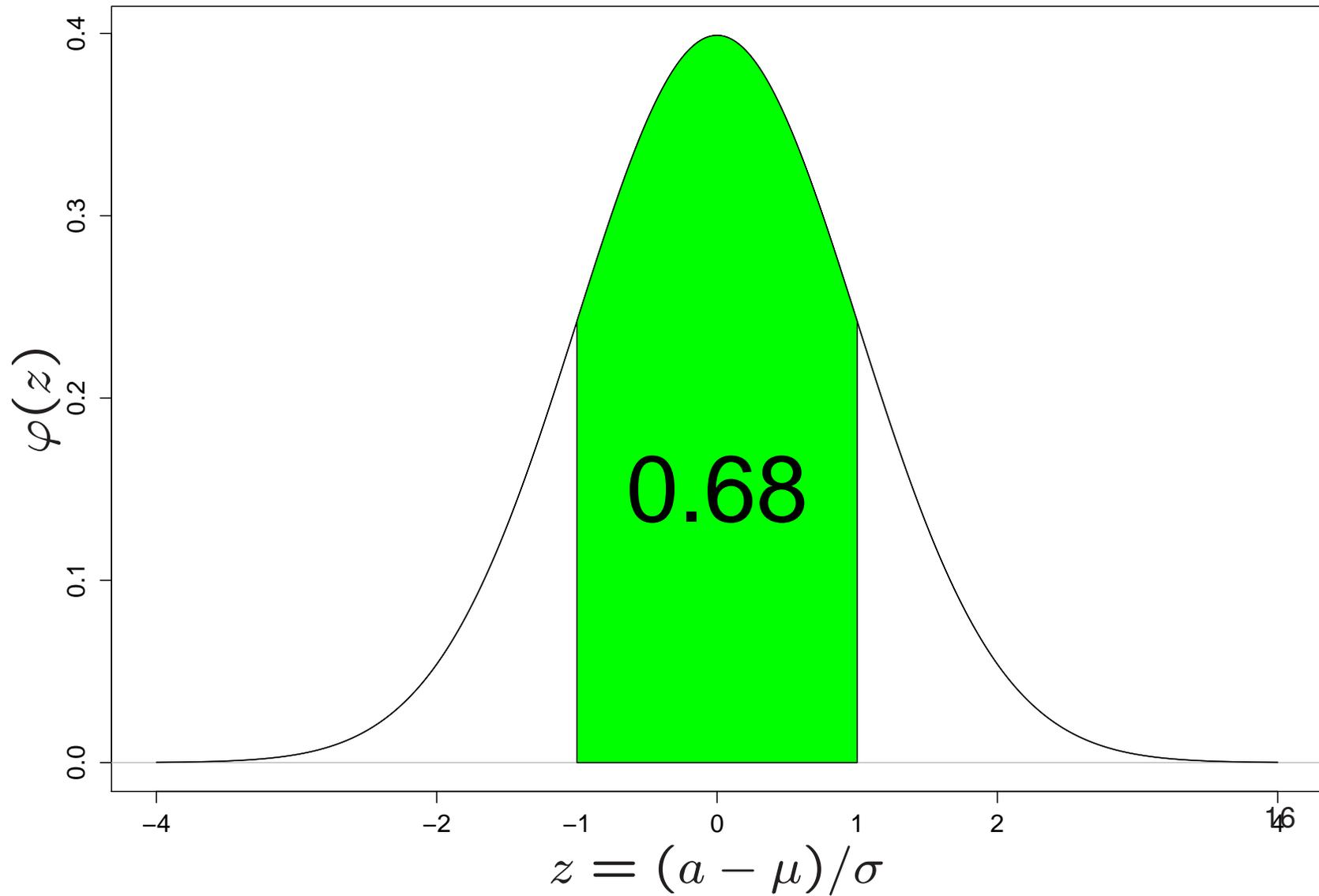


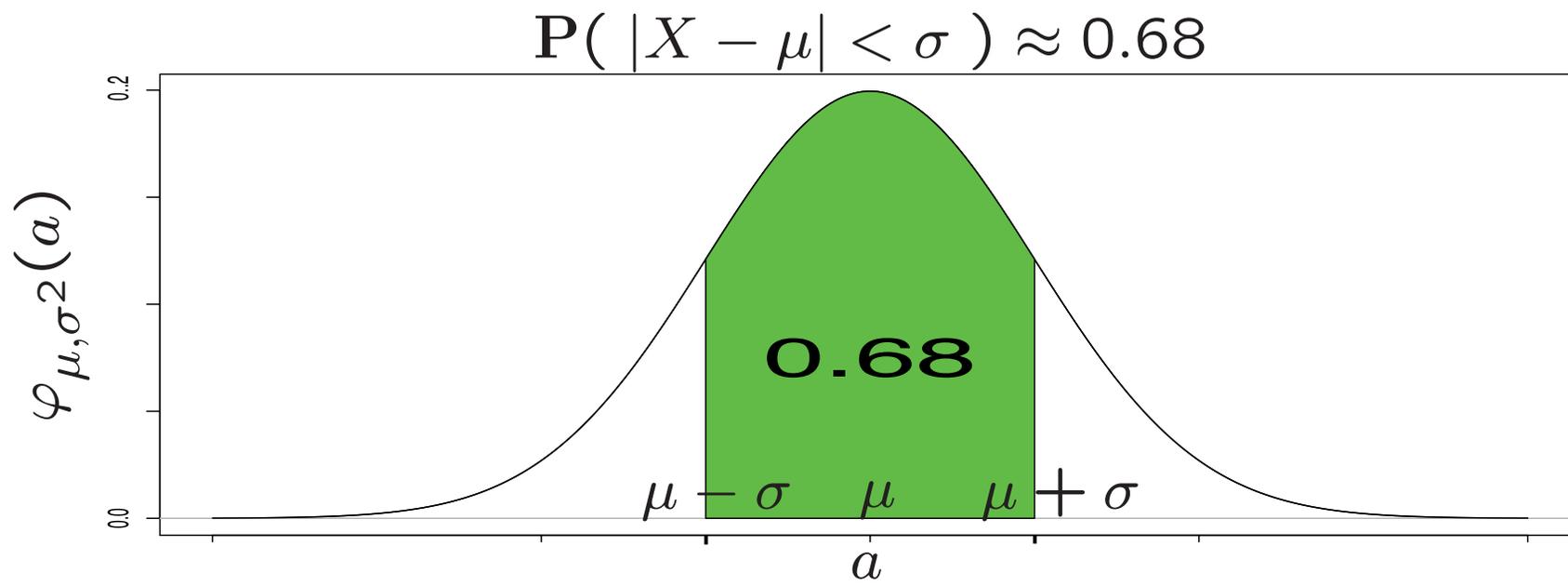
$$\mathbf{P}( |X - \mu|/\sigma < 2 ) \approx 0.95$$





$$\mathbf{P}( |X - \mu|/\sigma < 1 ) \approx 0.68$$





Approximation der Gewichte der Binomialverteilung  
durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große  $\mu := np$  und  $\sigma := \sqrt{npq}$ :

Sei  $X_n$  Binomial( $n, p$ )-verteilt. Dann gilt (siehe Teil 1):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu, \sigma^2}(k) \approx \int_{k - \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}} \varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$$
$$\approx \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

für eine  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte ZV'e  $X$ .